

Hoja de Ejercicios 3

April 25, 2018

Alrededor de la transformada de Fenchel-Legendre

1. Sea Y una variable aleatoria Bernoulli de parámetro p y $Z = Y - p$. Calcular en función de p , $\psi_Z(\lambda)$. Sea $0 < t < 1 - p$ y $a = p + t$, mostrar que

$$\psi_Z^*(t) = a \log \frac{a}{p} + (1 - a) \log \frac{1 - a}{1 - p}$$

2. Sea Z una variable aleatoria real.
 - (a) Mostrar que el conjunto de números positivos $S = \{\lambda > 0 : \mathbb{E}e^{\lambda Z} < \infty\}$ es vacío o es un intervalo con punto izquierdo igual a 0.
 - (b) Sea $b = \sup S$ y $I = (0, b)$. Mostrar que $\Psi_Z(\lambda)$ es indefinidamente derivable sobre I y que es una función convexa.
 - (c) Por $\mathbb{E}Z = 0$, mostrar que Ψ'_Z es continua en 0 y que $\Psi'_Z(0) = \Psi(0) = 0$ y que la transformada de Fenchel-Legendre es $\Psi_Z^*(t) = \sup_{\lambda \in I} (\lambda t - \Psi_Z(\lambda))$

3. Sea Z una variable aleatoria real y supongamos que

$$\frac{\text{Ent}[e^{\lambda Z}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda Z}]} \leq \lambda^2 v.$$

donde $\text{Ent}[X] = \mathbb{E}[X \log X] - \mathbb{E}[X] \log \mathbb{E}[X]$. Mostrar que $\Psi_{Z - \mathbb{E}Z}(\lambda) \leq \lambda^2 v$. (Ayuda : Estudiar la función $\lambda \mapsto \Psi_Z(\lambda)/\lambda$.)

Desigualdades de concentración

4. Sea X una variable no-negativa.

- (a) Mostrar que para cada $\lambda > 0$,

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda(X - \mathbb{E}X)}] \leq e^{\lambda^2 \mathbb{E}[X^2]/2}$$

(Ayuda : Utilizar la función ϕ del curso).

- (b) Sean X_1, \dots, X_n variables no-negativas independientes, mostrar que para cada $t > 0$,

$$\mathbb{P}(S \leq -t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2v}\right)$$

donde $S = \sum (X_i - \mathbb{E}X_i)$ y $v = \sum \mathbb{E}[X_i^2]$.

5. Sea B una variable Binomial de parámetros (n, p) . Mostrar que para $p \leq a \leq 1$,

$$\mathbb{P}(B \geq an) \leq \left(\left(\frac{p}{a} \right)^a \left(\frac{1-p}{1-a} \right)^{1-a} \right)^n \leq \left(\left(\frac{p}{a} \right)^a e^{a-p} \right)^n$$